Maths pour l'image : algèbre linéaire et géométrie

Devoir surveillé 1 : (03/11/2011)

Epreuve de Dominique Fourer
Durée : 1h50
Documents interdits
Barême indicatif sur 30. Bon courage !

Exercice 1 - compréhension du cours (5 points)

1. Quelles conditions doit vérifier un ensemble pour être muni d'une structure d'espace vectoriel ? Donnez un exemple d'espace vectoriel.
   Un K espace vectoriel, pour un corps K donné, est un ensemble muni d'une loi de composition interne notée $+$ et une loi de composition externe notée $\cdot$. Soit $(E, +, \cdot)$ un K-espace vectoriel.
   La loi interne $+ : E \times E \rightarrow E$ vérifie l'asociativité, la commutativité, l'existence d'un élément neutre et l'existence d'un inverse pour chaque élément de E.
   La loi externe $\cdot : K \times E \rightarrow E$ vérifie : l'associativité, l'existence d'un élément neutre et la distributivité par rapport à $+$ et à $\cdot$.
   Exemple : $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.
2. Quelle(s) propriété(s) doit vérifier une application (une application est une relation entre deux ensembles) pour être une application linéaire. Donnez un exemple d'application linéaire et un exemple d'application non-linéaire en précisant les ensembles de définition.
   Une application f est linéaire si elle préserve la linéarité des éléments entre les deux ensembles (source et destination), c'est à dire si $f(\sum_i \lambda_i \cdot x_i) = \sum_i \lambda_i \cdot f(x_i)$.
   Les ensembles source et destination sont des espaces vectoriels. Une application linéaire est appelée aussi morphisme d'espace vectoriel.
   Exemple dans $\mathbb{R}^3$:
   $f : (x, y, z) \mapsto (x, y, z)$ application identité.
   $f : (x, y, z) \mapsto (x^2, y^2, z^2)$ n'est pas linéaire car
   $f(a(x, y, z) + b(x', y', z')) = ((ax + bx')^2, (ay + by')^2, (az + bz')^2) \neq (ax^2, ay^2, az^2) + (bx'^2, by'^2, bz'^2)$

Exercice 2 - sous-espaces (5 points)
Soient les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants. Sont-ils des sous-espaces vectoriels ? Justifiez vos réponses.

1. $\mathcal{E}_1 = \{(x,y,z) \mid xy = 0\}$
   soient $u, v \in \mathcal{E}_1$, $\mu u + v = (\mu x + x', \mu y + y', \mu z + z')$
   on définit $X = \mu x + x'$ et $Y = \mu y + y'$
   $\mu u + v$ appartient à $\mathcal{E}_1$ si $XY = 0$
   or $XY = \underbrace{\mu^2 xy}_{=0} + \mu xy' + \mu x'y + \underbrace{x'y'}_{=0} = \mu xy' + \mu x'y$
   si $u = (0,1,1)$ et $v = (1,0,1)$, alors $XY = \mu \neq 0$ pour $\mu \neq 0$,
   donc $\mathcal{E}_1$ n est pas un sous-espace vectoriel de R^3.
2. $\mathcal{E}_2 = \{(x,y,z) \mid y = 2x\}$
   Soient $u, v \in \mathcal{E}_2$, $\mu u + v = (\mu x + x', \mu y + y', \mu z + z')$ on définit $X = \mu x + x'$
   alors $\mu y + y' = 2\mu x + 2x' = 2(\mu x + x') = 2X$
   donc $\mathcal{E}_2$ est un sous-espace vectoriel de R^3.
3. $\mathcal{E}_3 = \{(x,y,z) \mid x + y + z = 0\}$
   Soient $u, v \in \mathcal{E}_3$, $\mu u + v = (\mu x + x', \mu y + y', \mu z + z')$
   soit $X = \mu x + x'$, $Y = \mu y + y'$,$Z = \mu z + z'$
   $X + Y + Z = \mu \underbrace{(x + y + z)}_{=0} + \underbrace{x' + y' + z'}_{=0} = 0$
   Donc $\mathcal{E}_3$ est un sous-espace vectoriel de R^3.
4. $\mathcal{E}_4 = \{(x,y,z) \mid x + y + z = 1\}$
   Soient $u, v \in \mathcal{E}_3$, $\mu u + v = (\mu x + x', \mu y + y', \mu z + z')$
   soit $X = \mu x + x'$, $Y = \mu y + y'$, $Z = \mu z + z'$
   $X + Y + Z = \mu \underbrace{(x + y + z)}_{=1} + \underbrace{x' + y' + z'}_{=1} = \mu + 1 \neq 1$ si $\mu \neq 0$
   Donc $\mathcal{E}_4$ n'est pas un sous-espace vectoriel de R^3.
5. $\mathcal{E}_5 = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 = 0\}$
   $x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ et $y = 0$
   $\mathcal{E}_5 = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ Donc $\mathcal{E}_5$ est un sous-espace vectoriel de R^3.

Exercice 3 - bases (5 points)
Les familles de $\mathbb{R}^3$ suivantes sont-elles libres ? Génératrices de $\mathbb{R}^3$? Bases de $\mathbb{R}^3$?
Rappel : une base est une famille libre génératrice.

1. $\mathcal{F}_1 = \{(1,1,1), (2,2,2), (3,3,3)\}$
   Les vecteurs sont colinéaires : $(2,2,2) = 2 \cdot (1,1,1)$ et $(3,3,3) = 3 \cdot (1,1,1)$, donc la famille n'est pas libre, ni génératrice de $\mathbb{R}^3$ donc n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$
2. $\mathcal{F}_2 = \{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$
   $\mathcal{F}_2$ n'est pas libre car contient $(0,0,0)$ mais est génératrice de $\mathbb{R}^3$ car contient la base canonique.
   Ce n'est donc pas une base de $\mathbb{R}^3$
3. $\mathcal{F}_3 = \{(4,2,-2), (1,1,-1)\}$
   $\mathcal{F}_3$ est libre mais non génératrice de $\mathbb{R}^3$ (car une famille de 2 vecteurs libres ne

permet pas de gérérer tous les éléments de $\mathbb{R}^3$ par combinaison linéaire). Ce n'est donc pas une base de $\mathbb{R}^3$.

4. $\mathcal{F}_4 = \{(-2,1,1)(1,1,1),(-4,3,3)\}$
   $\mathcal{F}_4$ n'est pas libre car $\frac{1}{2}((-2,1,1)+2(1,1,1)) = \frac{1}{7}((-4,3,3)+4(1,1,1)) = (0,1,1)$
   On peut aussi vérifier que que l'équation :
   $a(-2,1,1) + b(1,1,1) + c(-4,3,3) = (0,0,0)$ a une infinité de solutions car le système suivant est sous-déterminé : $\begin{cases} -2a+b-4c=0 \\ a+b+3c=0 \\ a+b+3c=0 \end{cases}$

   $\begin{array}{l} 2l_2+l_1 \\ l_2 \end{array} \begin{cases} 3a+2b=0 \Leftrightarrow b=\frac{-2}{3}c \\ a+b+3c=0 \Leftrightarrow a=-\frac{7}{3}c \end{cases}$

5. $\mathcal{F}_5 = \{(1,0,1),(2,2,2),(0,1,0)\}$

$\mathcal{F}_5$ n'est pas libre car $(2,2,2) = 2((1,0,1)+(0,1,0))$, ni génératrice de $\mathbb{R}^3$. Ce n'est donc pas une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4 - linéarité (5 points)
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire et $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On sait que $f(1,1,0) = (1,0)$, $f(1,-1,0) = (-1,2)$ et $f(1,0,1) = (0,2)$.

1. Utiliser les propriétés de la linéarité de f pour trouver les images par f de $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$.
2. La famille $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ est-elle libre ? génératrice de $\mathbb{R}^2$? Base de $\mathbb{R}^2$

$e_1 = 1/2((1,1,0)+(1,-1,0))$ donc $f(e_1) = 1/2((1,0)+(-1,2)) = (0,1)$
$e_2 = 1/2((1,1,0)-(1,-1,0))$ donc $f(e_2) = 1/2((1,0)-(-1,2)) = (1,1)$
$e_3 = (1,0,1) - 1/2((1,1,0)+(1,-1,0)) = (0,2) - f(e_1) = (0,1)$
La famille $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ est non libre (car contient 2 vecteurs identiques), génératrice de $\mathbb{R}^2$ car contient 2 vecteurs libres de $\mathbb{R}^2$. Ce n est pas une base de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 - application linéaire (5 points)
Vérifiez qu'il existe une unique application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant :
$f(1,0,0) = (1,1)$, $f(0,1,0) = (0,1)$ et $f(0,0,1) = (-1,1)$:

1. Calculez $f(3,-1,4)$ puis $f(x,y,z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$
2. Déterminez Ker$f$ et Imf en indiquant une base.

$(3,-1,4) = 3(1,0,0) - 1(0,1,0) + 4(0,0,1)$
, donc $f(3,-1,4) = 3(1,1) - (0,1) + 4(-1,1) = (-1,6)$
$f(x,y,z) = x(1,1) + y(0,1) + z(-1,1) = (x-z, x+y+z)$

$\ker f = \{(x, y, z) \mid x = z, y = -2x\} = \{(x, -2x, x)\} = \text{vect}(\{(1, -2, 1)\})$
$\text{Im} f = \text{vect}(\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}) = \mathbb{R}^2$, dont une base est $\{(1, 1), (0, 1)\}$

Exercice 6 - changement de base (5 points)
Montrez que la famille $\mathcal{F} = \{(0, 1, 1), (-1, 0, 1), (1, -1, 0)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$? Calculez les coordonnées des vecteurs suivants (exprimés dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) dans cette base :

1. $u = (-2, 0, 2)$
2. $v = (3, -2, 5)$
3. $w = (1, 1, 1)$

Pour montrer que $\mathcal{F}$ est une base on vérifie que $\mathcal{F}$ est une famille libre, donc on résout le système :
$a(0, 1, 1) + b(-1, 0, 1) + c(1, -1, 0) = (0, 0, 0)$

$$\begin{cases} -b + c = 0 & \Leftrightarrow c = b \\ a - c = 0 & \Leftrightarrow a = c = b \\ a + b = 0 & \Leftrightarrow 2a = 0 \qquad \Leftrightarrow a = b = c = 0 \end{cases}$$

$\mathcal{F}$ est libre car le système a pour unique solution $(0, 0, 0)$. $\mathcal{F}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$ car contient 3 vecteurs libres de $\mathbb{R}^3$. Donc $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour calculer les coordonnées de u, v et w dans la base $\mathcal{F}$, on recherche (a, b, c) tel que :
$a(0, 1, 1) + b(-1, 0, 1) + c(1, -1, 0) = (x, y, z)$ avec (x, y, z) les coordonnées initiales du vecteur dans la base canonique (données dans l'énnoncé).
On obtient $u_F = (0, 2, 0)$, $v_F = (3, 2, 5)$ et $w_F = (3/2, -1/2, 1/2)$