MATHS POUR L'IMAGE : ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉOMÉTRIE

Devoir surveillé 2 : (14/11/2011)

Epreuve de Dominique Fourer
Durée : 1h50
Documents interdits

Exercice 1 - compréhension du cours (2 points)

1. Expliquez l'utilité les matrices d'applications linéaires en infographie. Argumentez votre réponse en donnant des exemples.
   Les matrices d'applications linéaires permettent d'appliquer et de manipuler des transformations géométriques telles que : la rotation, la translation et l'homothétie. Pour appliquer une transformation géométrique à un objet, il suffit d'effectuer un produit matriciel sur chaque sommet qui le compose. La structure *matrice* permet aussi de combiner un ensemble de transformations dans une représentation unique. La matrice obtenue est le produit succéssif des matrices correspondantes aux transformation intermédiaires car $M(f) \cdot M(g) = M(f \circ g)$.
   e.g. Pour appliquer succéssivement une rotation d'angle θ_x autour de l'axe X puis une rotation d'angle θ_z autour de l'axe Z au point $A = (A_x, A_y, A_z)$ on calcule
   $$\begin{pmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0 \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$
2. Expliquez le fonctionnement des coordonnées homogènes. Quelle est l'utilité d'un tel système ? Argumentez votre réponse.
   Les coordonnées homogènes reposent sur une représentation à $N+1$ dimensions où N est la dimension de l'espace projectif de référence. Si on considère un point $A = (A_x, A_y, A_z)$, ses coordonnées homogènes sont (A'_x, A'_y, A'_z, w) telles que $(A_x, A_y, A_z) = (\frac{A'_x}{w}, \frac{A'_y}{w}, \frac{A'_z}{w})$.
   Cette représentation rend possible toutes les calculs dans l'espace projectif (algèbre) comme dans un espace euclidien (géométrie), notamment les translations.

Exercice 2 - sous-espaces (4 points)
Soient les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants. Sont-ils des sous-espaces vectoriels ? Justifiez vos réponses.

1. $\mathcal{E}_1 = \{(x, y, z) \mid z = 0\}$
   Soient $u, v \in \mathcal{E}_1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda u + v = \begin{pmatrix} \lambda u_x + v_x \\ \lambda u_y + v_y \\ \lambda u_z + v_z = 0 \end{pmatrix}, \text{ car } u_z = v_z = 0,\ \lambda u + v \in \mathcal{E}_1$$

donc $\mathcal{E}_1$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

2. $\mathcal{E}_2 = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 0\}$
   $\mathcal{E}_2 = \{(0, 0, 0)\}$ donc $\mathcal{E}_2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. $\mathcal{E}_3 = \{(x, y, z) \mid 3x - 2y + z = 0\}$
   Soient $u, v \in \mathcal{E}_1 et \lambda \in \mathbb{R}$
   $$\lambda u + v = \begin{pmatrix} \lambda u_x + v_x \\ \lambda u_y + v_y \\ \lambda u_z + v_z \end{pmatrix}$$
   $$3 \cdot (\lambda u_x + v_x) - 2 \cdot (\lambda u_y + v_y) + \lambda u_z + v_z = \lambda \cdot \underbrace{(3u_x - 2u_y + u_z)}_{=0} + \underbrace{(3v_x - 2v_y + v_z)}_{=0}$$
   donc $\mathcal{E}_3$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
4. $\mathcal{E}_4 = \{(x, y, z) \mid x \neq y, x \neq z, y \neq z\}$
   $\mathcal{E}_4$ n'est pas un sous-espace vectoriel car ne contient pas $(0, 0, 0)$

Exercice 3 - sous-espaces (3 points)
Soit une famille $\mathcal{F} = \{\overrightarrow{v_1}, ..., \overrightarrow{v_k}\}$ de vecteurs d'un espace vectoriel E. On rappelle que l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de $\mathcal{F}$ est défini par $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \{\lambda_1 \overrightarrow{v_1} + ... + \lambda_k \overrightarrow{v_k} \mid \forall i \in \{1, ..., k\}, \lambda_i \in \mathbb{R}\}$.
Montrer que $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de E.

Soient $u, w \in \text{Vect}(\mathcal{F})$, donc $u = \sum_{i=1}^{k} u_i \cdot \vec{v_i}$ et $w = \sum_{i=1}^{k} w_i \cdot \vec{v_i}$.

Soit $\mu \in \mathbb{R}$, alors $\mu \cdot u + w = \mu \sum_{i=1}^{k} u_i \cdot \vec{v_i} + \sum_{i=1}^{k} w_i \cdot \vec{v_i} = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{(\mu \cdot u_i + v_i)}_{\lambda_i} \cdot \vec{v_i}$.

Donc $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 4 - matrices orthogonales (3 points)

Montrez si les matrices suivantes sont orthogonales. Si oui, déduisez leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{2+\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{2+\sqrt{2}}{4} & \frac{2-\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Une matrice est orthogonale si sa transposée est égale à son inverse.

On vérifie alors aisément que $A \cdot A^T = I$ et $B \cdot B^T = I$ avec I la matrice identité.
A et B sont donc des matrices orthogonales.
On peut aussi vérifier que les vecteurs colonne (resp. ligne) sont orthogonaux entre eux (produit scalaire égal à 0) et de norme 1. Le déterminant d'une matrice orthogonale vaux 1 ou -1 cependant toutes les matrices de déterminant égal à 1 ou -1 ne sont pas orthogonales.

Exercice 5 - inversion de matrices (3 points)
Calculez le déterminant et l'inverse des matrices suivantes si il existe :

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det C &= 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot (-4) + 2 \cdot (-10) - 3 \\ &= -12 - 20 - 3 = -35 \end{aligned}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} \cdot \mathrm{Com}^T(C) = -\frac{1}{35} \cdot \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T$$

$$= -\frac{1}{35} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 10 & -3 \\ -5 & -5 & 5 \\ 8 & 15 & 6 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 4 & 5 & -8 \\ -10 & 5 & -15 \\ 3 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{35} & \frac{1}{7} & \frac{-8}{35} \\ \frac{-10}{35} & \frac{1}{7} & \frac{-3}{7} \\ \frac{3}{35} & \frac{-1}{7} & \frac{-6}{35} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \frac{1}{\det D} \cdot \mathrm{Com}^T(D) = -\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T$$

$$= -\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 - résolution d'équation linéaires (3 points)
Calculez l'ensemble des solutions du triplet (x,y,z) pour les systèmes d'équation suivants :

1. $\begin{cases} 3x - 2y + z = 3 \\ 3x - 4z = 2 \\ -x - y - 2z = 7 \end{cases}$

   On pouvait remarquer que le système 1. peut s'écrire (cf. question précédente) :
   $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

   La solution est donnée immédiatement par $C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-34}{35} \\ \frac{-25}{7} \\ \frac{-43}{35} \end{pmatrix}$

2. $\begin{cases} 3x + 4y - 5z = 2 \\ 2x - y + 3z = 4 \\ 6x + 8y - 10z = 4 \end{cases}$

On voit tout de suite que le système est sous-déterminé car $l_3 = 2l_1$
Il existe donc une infinité de solutions.

$$\begin{array}{l} l_1 + 4l_2 \\ l_2 \end{array} \begin{cases} 11x + 7z = 18 \Leftrightarrow x = \frac{18-7z}{11} \\ y = -4 + 2x + 3z \end{cases}$$

En substituant x dans l_2 on a :
$y = -4 + 2 \cdot \frac{18-7z}{11} + 3z = \frac{-44+36-14z+33z}{11} = \frac{-8+19z}{11}$

Par substitution, on peut obtenir les solutions suivantes :

$$\begin{cases} x_z = \frac{18-7z}{11} \\ y_z = \frac{-8+19z}{11} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_y = \frac{78-21y}{57} \\ z_y = \frac{8+11y}{19} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_x = \frac{286-209x}{77} \\ z_x = \frac{-11x+18}{7} \end{cases}$$

Exercice 7 - matrice et application linéaire (2 points)

Trouvez les applications linéaires associées à chacune des matrices suivantes puis calculez leur rang.

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

L'application associée à la matrice E est :
$(x, y, z) \mapsto (y - z, 2x + 3z, x - y + 2z)$
On voit que les lignes de la matrices sont linéairement indépendantes, de plus une étape du pivot de Gauss donne la matrice suivante :

$$\begin{array}{r} l_3 + l_1 \\ l_1 \\ l_2 - 2(l_3 + l_1) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\text{rang}(E) = 3$

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 6 & 8 & -10 \end{pmatrix}$$

L'application associée à la matrice F est :
$(x, y, z) \mapsto (3x + 4y - 5z, 2x - y + 3z, 6x + 8y - 10z)$
On voit que $l_3 = 2l_1$, donc $\text{rang}(F) = 2$